

MATHEMATICAL SCIENCES

GENERALIZED SOLUTIONS OF OPTIMIZATION PROBLEM

Sadygov M.A.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Baku State University*

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Садыгов М.А.

*доктор физико-математических наук
Бакинский Государственный Университет*

Abstract

The paper investigates the dual space to the space $M_\alpha(E, Y)$ and with its help introduces the concept of a generalized solution of extremal problems. In the work, a generalized problem is defined, and the continuity of a specially constructed functional is proved. Using spaces $M_\alpha^*(E, Y)$, the concept of a generalized solution of extremal problems is introduced, the existence of a minimizing generalized solution of extremal problems is studied.

Аннотация

В работе исследуется сопряженное пространство к пространству $M_\alpha(E, Y)$ и с его помощью вводится понятие обобщенного решения экстремальных задач. В работе определяется обобщенная задача, доказана непрерывность специально построенного функционала. В работе используя пространства $M_\alpha^*(E, Y)$, вводится понятие обобщенного решения экстремальных задач, изучается существование минимизирующего обобщенного решения экстремальных задач.

Keywords: space, seminorm, measure, generalized solution.

Ключевые слова: пространство, полунорма, мера, обобщенное решение.

1. Введение. В вариационном исчислении, в теоремах существования решений в пространстве абсолютно непрерывных функций, выпуклости по производным от подинтегральных функций и в задаче оптимального управления в классе измеримых ограниченных функций важную роль играет условие Филиппова. Если эти условия отсутствуют, то используется из обобщенного решения экстремальных задач. Аналогично в теории дифференциальных уравнений вводится обобщенное решение в теории оптимального управления. В теории оптимального управления обобщенные решения в частном случае были введены Дж. Варгой (см. [1]).

В 1900 г. Д. Гильберт сформировал свою двадцатую проблему следующим образом: «не допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача ... если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование?» В настоящее время этой тематике посвящены многие интересные работы.

В работах [2-5] автора было введено пространство $M_{(\alpha)}(\psi, E)$, был изучен ряд его свойств, и с помощью его было введено понятие обобщенного решения экстремальных задач. В частности, отсюда следует определение обобщенного решения для задачи оптимального управления, которая была введена Дж. Варгой. В статьях [4] и [5] рассматриваются пространства $M_{(\alpha)}(\psi, E)$ и $SM_{(\alpha)}(\psi, E)$ и изучен ряд их свойств. В данной работе используя пространство $M_{(\alpha)}(\psi, E)$, изучаются обобщенные решения экстремальных задач. Работа является продолжением работы [4] и [5].

Работа состоит из четырех пунктов. В пункте 1 дано краткое изложение работы. В пункте 2 дано определение пространства $M_{(\alpha)}(E, Y)$ и без доказательства рассмотрен ряд его свойств. В пункте 3 изучаются обобщенные решения экстремальных задач и изучена непрерывность обобщенного функционала. В пункте 4 изучаются обобщенные решения вариационных задач.

2. Пространство $M_{(\alpha)}(E, Y)$ и его свойства

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с положительной конечной мерой, (T, Σ^*, μ^*) его лебеговское расширение, X и Y сепарабельные банаховы пространства. Через $B(X)$ и $B(Y)$ (или $\sum_B(X)$ и $\sum_B(Y)$) обозначим множество всех борелевских подмножеств X и Y соответственно. Через $B(\bar{R})$ обозначим множество всех борелевских подмножеств \bar{R} . Отображение $g: T \rightarrow X$ называется μ -измеримое, если $g^{-1}(A) \in \Sigma^*$ при $A \in B(X)$. Таким образом отображение g является μ -измеримое тогда и только тогда,

когда оно μ^* измеримо. Функция $\varphi: T \rightarrow \bar{R}$ называется μ -измеримой, если $\varphi^{-1}(A) \in \Sigma^*$ при $A \in B(\bar{R})$. Обозначим через $L_p(T, \Sigma, \mu, X)$ (или через $L_p(T, X)$) множество всех (эквивалентных классов) таких μ -измеримых отображений $u: T \rightarrow X$, что $\int_T \|u(t)\|^p d\mu < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$ (см. [1, с.96]) и [6, лемму 3.6.9]).

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с положительной конечной мерой, X_i и Y сепарабельные банаховы пространства при $i = 1, \dots, s, s+1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1})$, где $1 \leq \alpha_i < +\infty$ при $i = 1, \dots, s$, s натуральное число, $\alpha_{s+1} = +\infty$, $X = X_1 \times \dots \times X_{s+1}$. Ясно, что $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{X_1} + \dots + \|\cdot\|_{X_s} + \|\cdot\|_{X_{s+1}}$ является нормой в пространстве X . Далее везде интеграл понимается в смысле Бохнера (см. [1]).

Положим $L_{(\alpha)}(T, X) = L_{\alpha_1}(T, X_1) \times \dots \times L_{\alpha_s}(T, X_s) \times L_\infty(T, X_{s+1})$. Обозначим через $\|\cdot\|_{\alpha_i}$ нормы в $L_{\alpha_i}(T, X_i)$ при $i = 1, \dots, s, s+1$. Ясно, что $\|\cdot\|_{(\alpha)} = \|\cdot\|_{\alpha_1} + \dots + \|\cdot\|_{\alpha_s} + \|\cdot\|_\infty$ является нормой в пространстве $L_{(\alpha)}(T, X)$.

Если $f: T \times X \rightarrow Y$ $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримая функция, т.е. измерима относительно σ алгебры порожденной в $T \times X$ произведением множества из Σ^* и борелевского множества в X . Это предположение, в частности, обеспечивает измеримость функции $t \rightarrow f(t, u(t))$ на T для всех Σ^* -измеримых отображений $u(\cdot)$ из T в X . Пусть $E \subset L_{(\alpha)}(T, X)$ непустое множество.

Рассмотрим пространство $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$, которое изучено в [4]. В работе используемые утверждения даны без доказательства, которые имеются в [4].

Пусть $E \subset L_{(\alpha)}(T, X)$ непустое множество, $\psi: T \times X \rightarrow [0, +\infty]$ $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримая функция, т.е. измерима относительно σ алгебры порожденной в $T \times X$ произведением множества из Σ^* и борелевского множества в X . Положим

$$S(\psi, E) = \{u \in E : \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty\}.$$

Если $f_1(t, u(t)) = f_2(t, u(t))$ п.в. $t \in T$ при любом $u \in S(\psi, E)$, то будем говорить, что $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримые (или $(\Sigma^* \times B(X), B(Y))$ измеримые) отображения f_1 и f_2 из $T \times X$ в Y эквивалентны относительно (ψ, E) . Если $f_1(t, u(t)) = f_2(t, u(t))$ п.в. $t \in T$ при любом $u \in S(\psi, E)$, то

$\|f_1(t, u(t))\| = \|f_2(t, u(t))\|$ п.в. $t \in T$ при любом $u \in S(\psi, E)$. Поэтому

$$\int_T f_1(t, u(t)) d\mu = \int_T f_2(t, u(t)) d\mu \quad \text{и} \quad \int_T \|f_1(t, u(t))\| d\mu = \int_T \|f_2(t, u(t))\| d\mu.$$

при любом $u \in S(\psi, E)$. Кроме того, если $f_1(t, u(t)) = f_2(t, u(t))$ п.в. $t \in T$ при любом $u \in S(\psi, E)$, то

$$\int_T \|f_1(t, u(t)) - f_2(t, u(t))\| d\mu \leq \sup_{u \in S(\psi, E)} \int_T \|f_1(t, u(t)) - f_2(t, u(t))\| d\mu = 0.$$

Обозначим через A множество всех эквивалентных относительно (ψ, E) классов $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримых отображений $f: T \times X \rightarrow Y$. Через $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ обозначим множество тех f из A которые удовлетворяют условию:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) + c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} + b(t) \|x_{s+1}\|^p + c\psi(t, x)$$

при $t \in T$, $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) \in X = X_1 \times \dots \times X_s \times X_{s+1}$ и $a(\cdot), b(\cdot) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T) : d(t) \geq 0 \text{ при } t \in T\}$, $p \geq 1$ и $c \geq 0$.

Легко проверяется, что $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ линейное пространство.

Предположим, что $S(\psi, E) \neq \emptyset$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ для которого $B_k = \{u \in S(\psi, E) : \|u\|_{(\alpha)} \leq k\} \neq \emptyset$, то $\sup_{u \in B_k} \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty$. Ясно, что

$$P_k(f) = \sup_{u \in B_k} \int_T \|f(t, u(t))\| d\mu, \quad k \in \mathbb{N} \quad (B_k \neq \emptyset)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на пространстве $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ (т.е. для каждого $f \in M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$, $f \neq 0$, найдется хотя бы одна полунорма P_k , для которой $P_k(f) \neq 0$). Поэтому по теореме 1.37[7, с.35] семейство $\{P_k\}$ индицирует локально выпуклую топологию τ со счетной локальной

базой на этом пространстве. Далее, через $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ обозначим локально выпуклое пространство, порожденное семейством полунорм $\{P_k\}$. Из теоремы 1.24[7, с.25] следует, что топология τ метризуема.

Если $E = L_{(\alpha)}(T, X)$, то вместо $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ будем писать $M_{(\alpha)}(\psi, Y)$. Если $E \subset L_{(\alpha)}(T, X)$ и $\psi \equiv 0$, то вместо $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ будем писать $M_{(\alpha)}(E, Y)$. Если $E = L_{(\alpha)}(T, X)$ и $\psi \equiv 0$, то вместо $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ будем писать $M_{(\alpha)}(Y)$. Если α , где $1 \leq \alpha \leq \infty$, скаляр, то вместо $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ будем писать $M_\alpha(\psi, E, Y)$.

Через $M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y)$ обозначим пространство, сопряженное к $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ и везде считаем, что $M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y)$ снабжено $\sigma(M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y), M_{(\alpha)}(\psi, E, Y))$ топологией.

Если $v(\cdot) \in L_\infty(T, Y^*)$, то положим $\langle v(t), f(t, u(t)) \rangle = v(t)(f(t, u(t)))$ при $t \in T$.

Легко проверяется, что (см.[4]) функционал $v_{(u,v)}(f) = \int_T \langle v(t), f(t, u(t)) \rangle d\mu$ для любого $u \in S(\psi, E)$ и $v(\cdot) \in L_\infty(T, Y^*)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$.

Положим $H = \{f \in M_{(\alpha)}(\psi, E, Y) : \int_T f(t, u(t)) d\mu = 0 \text{ при } u \in S(\psi, E)\}$,

$$H^\perp = \{v \in M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y) : v(f) = 0 \text{ при } f \in H\}.$$

Ясно, что sH является подпространством в $SM_{(\alpha)}(S(\psi, E), Y)$ (см. [5]).

Лемма 2.1. Справедливо следующее соотношение:

$$M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y) = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u,v)} : u \in S(\psi, E), v(\cdot) \in L_\infty(T, Y^*)\},$$

$$H^\perp = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u,y^*)} : u \in S(\psi, E), y^* \in Y^*\},$$

где через $\text{Lin } S$ обозначена линейная оболочка множества S .

Лемма 2.2. Функционал $v_{(u,v)}(f) = \int_T \langle v(t), f(t, u(t)) \rangle d\mu$ для любого $u \in S(\psi, E)$ и $v(\cdot) \in L_\infty(T, Y^*)$

является линейным непрерывным функционалом на пространстве $M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$, т.е. $v_{(u,v)} \in M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y)$.

Отметим, что $v_{(u,0)}(f) = 0$ при $f \in M_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ и $u \in S(\psi, E)$. Поэтому в дальнейшем все линейные функционалы вида $v_{(u,0)}$ при $u \in S(\psi, E)$ и нулевой функционал будем отождествлять.

Лемма 2.3. Если $k \in \mathbb{N}$ и $B_k \neq \emptyset$, $Q \subset B_k$ и $V \subset \{v(\cdot) \in L_\infty(T, Y^*) : \|v(\cdot)\|_{L_\infty(T, Y^*)} \leq 1\}$,

$\Omega_k = \{f \in M_{(\alpha)}(\psi, E, Y) : P_k(f) \leq 1\}$ и $D = \{v_{(u,v)} : u \in Q, v \in V\}$, то

$$D \subset \Omega_k^0 = \{v \in M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y) : v(f) \leq 1 \text{ при } f \in \Omega_k\}$$

и D относительно компактно в $M_{(\alpha)}^*(\psi, E, Y)$, где через Ω_k^0 обозначена полярная множества Ω_k (см. [7, с.81]).

Рассмотрим пространство $M_{(\alpha)}(\psi, E)$ которое изучено в [4].

Если $Y = \bar{R}$, то пространство $M_{(\alpha)}(\psi, E, \bar{R})$ обозначим через $M_{(\alpha)}(\psi, E)$. Через $M_{(\alpha)}^*(\psi, E)$ обозначим пространство, сопряженное к $M_{(\alpha)}(\psi, E)$ и везде считаем, что $M_{(\alpha)}^*(\psi, E)$ снабжено $\sigma(M_{(\alpha)}^*(\psi, E), M_{(\alpha)}(\psi, E))$ топологией. Легко проверяется, что $v_{(u,v)}(f) = \int_T v(t)f(t, u(t))d\mu$ для любого $u \in S(\psi, E)$ и $v(\cdot) \in L_\infty(T)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $M_{(\alpha)}(\psi, E)$, где $L_\infty(T) = L_\infty(T, \mathbb{R})$. Для простоты $v_{(u,1)}$ обозначим через v_u .

Отметим, что $v_{(u,0)}(f) = 0$ при $f \in M_{(\alpha)}(\psi, E)$ и $v_{(u,1)}(f) = \int_T f(t, u(t))d\mu$.

Пусть последовательность v_{u_i} сходится к \bar{v} в $M_{(\alpha)}^*(\psi, E)$, где $u_i \in S(\psi, E)$ и $f \in M_{(\alpha)}(\psi, E)$. Так как $e(t)f \in M_{(\alpha)}(\psi, E)$ при $e(\cdot) \in L_\infty(T)$ и, то $v_{u_i}(e(t)f) = \int_T e(t)f(t, u_i(t))dt \rightarrow \bar{v}(e(t)f)$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\{f(t, u_i(t))\}$ секвенциально слабо фундаментальны в $L_1(T)$. Так как $L_1(T)$ секвенциально слабо полно, поэтому $\{f(t, u_i(t))\}$ равномерно интегрируемы.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и последовательность v_{u_i} сходится к \bar{v} в $M_{\alpha}^*(\psi, E)$, где $u_i \in S(\psi, E)$, $1 \leq \alpha < +\infty$. Так как $\langle e(t), x \rangle \in M_{\alpha}(\psi, E)$ при $e(\cdot) \in L_{\alpha'}^n(T)$, $\alpha\alpha' = \alpha + \alpha'$, то

$$v_{u_i}(\langle e(t), x \rangle) = \int_T \langle e(t), u_i(t) \rangle dt \rightarrow \bar{v}(\langle e(t), x \rangle) \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $\{u_i(t)\}$ секвенциально слабо фундаментальны в $L_{\alpha}^n(T)$. Поэтому существует функция $\bar{u}(\cdot) \in L_{\alpha}^n(T)$ такая, что $\{u_i(t)\}$ сходится к $\bar{u}(\cdot)$ в топологии $\sigma(L_{\alpha}^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$.

Положим $H = \{f \in M_{(\alpha)}(\psi, E) : \int_T f(t, u(t)) d\mu = 0 \text{ при } u \in S(\psi, E)\}$. Аннулятор H^{\perp} определяется следующим образом: $H^{\perp} = \{v \in M_{(\alpha)}^*(\psi, E) : v(f) = 0 \text{ при } f \in H\}$. Отметим, что H^{\perp} замкнутое множество. Ясно, что $\text{cl} H$ является подпространством в $SM_{(\alpha)}(S(\psi, E))$.

Лемма 2.4. Справедливы следующие соотношения:

$$H^{\perp} = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u, \lambda)} : u \in S(\psi, E), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$M_{(\alpha)}^*(\psi, E) = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u, v)} : u \in S(\psi, E), v(\cdot) \in L_{\infty}(T)\}.$$

Лемма 2.5. Если $T \subset \mathbb{R}^s$ ограниченное измеримое множество и из $\beta_i(t) \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=1}^m \beta_i(t) = 1$ и $u_i \in S(\psi, E)$ при $i = 1, \dots, m$ следует, что $\sum_{i=1}^m \beta_i(t) u_i(t) \in S(\psi, E)$, где $\beta_i(t)$ измеримые функции, m натуральное число, то $\overline{\text{co}}\{v_u : u \in S(\psi, E)\} = \text{cl}\{v_u : u \in S(\psi, E)\}$.

Положим $K_{(\alpha)}(\psi, E) = \{f \in M_{(\alpha)}(\psi, E) / f : T \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ каратеодориевская функция}\}$. Отметим, что $f_1, f_2 \in K_{(\alpha)}(\psi, E)$ эквивалентно тогда и только тогда, когда $f_1(t, u(t)) = f_2(t, u(t))$ при $u \in S(\psi, E)$.

Через $K_{(\alpha)}^*(\psi, E)$ обозначим пространство, сопряженное к $K_{(\alpha)}(\psi, E)$ и везде считаем, что $K_{(\alpha)}^*(\psi, E)$ снабжено $\sigma(K_{(\alpha)}^*(\psi, E), K_{(\alpha)}(\psi, E))$ топологией. Легко проверяется, что $v_{(u, v)}(f) = \int_T v(t) f(t, u(t)) d\mu$ для любого $u \in S(\psi, E)$ и $v(\cdot) \in L_{\infty}(T)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $K_{(\alpha)}(\psi, E)$. Для простоты $v_{(u, 1)}$ обозначим через v_u .

Лемма 2.6. Если $k \in \mathbb{N}$ и $B_k \neq \emptyset$, $Q \subset B_k$ и $\Omega_k = \{f \in K_{(\alpha)}(\psi, E) : P_k(f) \leq 1\}$ и $D = \{v_u : u \in Q\}$, то $D \subset \Omega_k^0 = \{v \in K_{(\alpha)}^*(\psi, E) : v(f) \leq 1 \text{ при } f \in \Omega_k\}$ и D относительно компактно в $K_{(\alpha)}^*(\psi, E)$.

Рассмотрим пространство $K_{(\alpha)}(Y)$, которое изучено в [4]. В работе используемые утверждения даны без доказательства, которые имеются в [4].

Обозначим через \tilde{A} множество всех каратеодориевских отображений из $T \times X$ в Y . Через $K_{(\alpha)}(Y)$ обозначим множество тех f из \tilde{A} , которые удовлетворяют условию:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) + c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} + b(t) \|x_{s+1}\|^p$$

при $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) \in X = X_1 \times \dots \times X_s \times X_{s+1}$ и $a(\cdot), b(\cdot) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T) : d(t) \geq 0 \text{ при } t \in T\}$, $p \geq 1$ и $c \geq 0$.

Положим $B_k = \{u \in L_{(\alpha)}(T, X) : \|u\|_{(\alpha)} \leq k\}$. Ясно, что $K_{(\alpha)}(Y)$ линейное пространство и

$$P_k(f) = \sup_{u \in B_k} \int_T \|f(t, u(t))\| d\mu, \quad k \in \mathbb{N}$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на этом пространстве (т.е. для каждого $f \in K_{(\alpha)}(Y)$, $f \neq 0$, найдется хотя бы одна полунорма P_k , для которой $P_k(f) \neq 0$), поэтому по теореме 1.37[7, с.35] семейство $\{P_k\}$ индицирует локально выпуклую топологию τ со счетной локальной базой. Далее через $K_{(\alpha)}(Y)$ обозначим локально выпуклое пространство, порожденное семейством полунорм $\{P_k\}$. Из теоремы 1.24[7, с.25] следует, что топология τ метризуема.

Легко проверяется, что функционал $v_{(u,v)}(f) = \int_T \langle v(t), f(t, u(t)) \rangle d\mu$ для любого $u \in L_{(\alpha)}(T, X)$ и $v(\cdot) \in L_{\infty}(T, Y^*)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $K_{(\alpha)}(Y)$, т.е. $v_{(u,v)} \in K_{(\alpha)}^*(Y)$.

Через $K_{(\alpha)}^*(Y)$ обозначим пространство, сопряженное к $K_{(\alpha)}(Y)$ и везде считаем, что $K_{(\alpha)}^*(Y)$ снабжено $\sigma(K_{(\alpha)}^*(Y), K_{(\alpha)}(Y))$ топологией. Из теоремы 3.10[7] следует, что $K_{(\alpha)}^*(Y)$ локально выпуклое отделимое пространство.

Лемма 2.7. Если $k \in \mathbb{N}$ и $B_k \neq \emptyset$, $Q \subset B_k$ и $V \subset \{v(\cdot) \in L_{\infty}(T, Y^*) : \|v(\cdot)\|_{L_{\infty}(T, Y^*)} \leq 1\}$, $\Omega_k = \{f \in K_{(\alpha)}(Y) : P_k(f) \leq 1\}$ и $D = \{v_{(u,v)} : u \in Q, v \in V\}$, то $D \subset \Omega_k^0 = \{v \in K_{(\alpha)}^*(Y) : v(f) \leq 1 \text{ при } f \in \Omega_k\}$ и D относительно компактно в $K_{(\alpha)}^*(Y)$.

Положим $H = \{f \in K_{(\alpha)}(Y) : \int_T f(t, u(t)) d\mu = 0 \text{ при } u(\cdot) \in L_{(\alpha)}(T, X)\}$,

$$H^{\perp} = \{v \in K_{(\alpha)}^*(Y) : v(f) = 0 \text{ при } f \in H\}.$$

Ясно, что $\text{cl}H$ является подпространством в $SK_{(\alpha)}(Y)$.

Лемма 2.8. Справедливы следующие соотношения:

$$H^{\perp} = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u, y^*)} : u \in L_{(\alpha)}(T, X), y^* \in Y^*\},$$

$$K_{(\alpha)}^*(Y) = \overline{\text{Lin}}\{v_{(u, v)} : u \in L_{(\alpha)}(T, X), v(\cdot) \in L_{\infty}(T, Y^*)\}.$$

Лемма 2.9. Если $f : T \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримая функция, для почти всех $t \in T$ функция $f(t, \cdot)$ пн.сн. на X и существуют $a(\cdot), b(\cdot) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T) : d(t) \geq 0 \text{ при } t \in T\}$, $p \geq 1$ и $c \geq 0$ такие, что $-a(t) - c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} - b(t) \|x_{s+1}\|^p \leq f(t, x)$ при $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) \in X = X_1 \times \dots \times X_s \times X_{s+1}$, то $u \rightarrow \int_T f(t, u(t)) d\mu$ полунепрерывное снизу отображение из $L_{(\alpha)}(T, X)$ в $\bar{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Определим неотрицательный интегрант $g(t, x)$ соотношением

$$g(t, x) = f(t, x) + a(t) + c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} + b(t) \|x_{s+1}\|^p$$

при $x \in X$ и $t \in T$. Возьмем любую последовательность u^k , сходящуюся к \bar{u} в $L_{(\alpha)}(T, X)$. По лемме Фату [6, с.170], если (T, Σ, μ) - пространство с положительной мерой, $\{v_k\}$ последовательность неотрицательных измеримых, но не обязательно интегрируемых функций, то $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T v^k(t) d\mu \geq \int_T \liminf_{k \rightarrow \infty} v^k(t) d\mu$. Применяя лемму Фату, получим, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T g(t, u^k(t)) d\mu \geq \int_T \liminf_{k \rightarrow \infty} g(t, u^k(t)) d\mu.$$

По условию почти для всех $t \in T$ функция $f(t, \cdot)$ пн.сн. на X , то почти для всех $t \in T$ функция $g(t, \cdot)$ пн.сн. на X . Поэтому $\liminf_{k \rightarrow \infty} g(t, u_k(t)) \geq g(t, \bar{u}(t))$ почти для всех $t \in T$ и

$$\int_T \liminf_{k \rightarrow \infty} g(t, u^k(t)) d\mu \geq \int_T g(t, \bar{u}(t)) d\mu. \text{ Так как}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|u_i^k(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|u_{s+1}^k(t)\|^p) d\mu = \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|\bar{u}_i(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|\bar{u}_{s+1}(t)\|^p) d\mu,$$

то

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T g(t, u^k(t)) d\mu &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T f(t, u^k(t)) d\mu + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|u_i^k(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|u_{s+1}^k(t)\|^p) d\mu = \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T f(t, u^k(t)) d\mu + \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|\bar{u}_i(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|\bar{u}_{s+1}(t)\|^p) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T f(t, u^k(t)) d\mu + \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|\bar{u}_i(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|\bar{u}_{s+1}(t)\|^p) d\mu \geq$$

$$\geq \int_T f(t, \bar{u}(t)) d\mu + \int_T (a(t) + c \sum_{i=1}^s \|\bar{u}_i(t)\|^{\alpha_i} + b(t) \|\bar{u}_{s+1}(t)\|^p) d\mu.$$

Поэтому $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_T f(t, u^k(t)) d\mu \geq \int_T f(t, \bar{u}(t)) d\mu$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если $f \in K_{(\alpha)}(R)$, то отображение $u \rightarrow \int_T f(t, u(t)) d\mu$ непрерывно как отображение из $L_{(\alpha)}(T, X)$ в R .

Если $\alpha \in R$, где $1 \leq \alpha \leq +\infty$, то пространство $K_{(\alpha)}(E, Y)$ обозначим через $K_\alpha(E, Y)$.

Замечание 2.1. Пусть $E \subset L_{(\alpha)}(T, X)$ непустое множество, $\psi: T \times X \rightarrow [0, +\infty]$ $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримая функция. Положим

$$S(\psi, E) = \{u \in E: \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty\}.$$

Обозначим через A множество всех эквивалентных относительно (ψ, E) классов $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримых отображений $f: T \times X \rightarrow Y$. Через $\tilde{M}_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ обозначим множество тех f из A которые удовлетворяют условию: $\|f(t, x)\| \leq a(t) + c\psi(t, x)$ при $t \in T$, $x \in X$ и $a(\cdot) \in L_1^+(T)$ и $c \geq 0$.

Легко проверяется, что $\tilde{M}_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ линейное пространство. Предположим, что $S(\psi, E) \neq \emptyset$ и для каждого $k \in N$ для которого $B_k = \{u \in S(\psi, E): \|u\|_{(\alpha)} \leq k\} \neq \emptyset$, то $\sup_{u \in B_k} \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty$. Ясно, что

$$P_k(f) = \sup_{u \in B_k} \int_T \|f(t, u(t))\| d\mu, \quad k \in N \quad (B_k \neq \emptyset)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на пространстве $\tilde{M}_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$. Поэтому по теореме 1.37[7, с.35] семейство $\{P_k\}$ индицирует локально выпуклую топологию τ со счетной локальной базой на этом пространстве. Через $\tilde{M}_{(\alpha)}(\psi, E, Y)$ обозначим локально выпуклое пространство, порожденное семейством полунорм $\{P_k\}$.

Замечание 2.2. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с положительной конечной мерой, X_i и Y сепарабельные банаховы пространства при $i = 1, \dots, s, s+1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1})$, где $1 \leq \alpha_i < +\infty$ при $i = 1, \dots, s$, $\alpha_{s+1} = +\infty$, $X = X_1 \times \dots \times X_{s+1}$, $D = D_1 \times \dots \times D_{s+1}$, где $D_i \subset X_i$ борелевское множество при $i = 1, \dots, s, s+1$. Обозначим через \tilde{A} множество всех каратеодориевских функций из $T \times D$ в Y .

Через $K_{(\alpha)}(D, Y)$ обозначим множество тех f из \tilde{A} , которые удовлетворяют условию:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) + c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} + b(t) \|x_{s+1}\|^p$$

при $t \in T$, $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) \in D = D_1 \times \dots \times D_s \times D_{s+1}$ и $a(\cdot), b(\cdot) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T): d(t) \geq 0 \text{ при } t \in T\}$, $p \geq 1$ и $c \geq 0$. Положим $L_{(\alpha)}^{(n)}(T, D) = \{u(\cdot) \in L_{(\alpha)}^{(n)}(T, X): u(t) \in D\}$.

Положим $B_k(D) = \{u \in L_{(\alpha)}(T, D): \|u\|_{(\alpha)} \leq k\} \neq \emptyset$. $K_{(\alpha)}(D, Y)$ линейное пространство и

$$P_k(f) = \sup_{u \in B_k(D)} \int_T \|f(t, u(t))\| d\mu, \quad k \in N \quad (B_k(D) \neq \emptyset)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на этом пространстве (т.е. для каждого $f \in \tilde{A}$, $f \neq 0$, найдется хотя бы одна полунорма P_k , для которой $P_k(f) \neq 0$). Поэтому по теореме 1.37[7, с.35] семейство $\{P_k\}$ индицирует локально выпуклую топологию τ со счетной локальной базой на этом пространстве.

Положим $\bar{B}_k(D) = \{x \in D: \|x\|_X \leq k\} \neq \emptyset$. Ясно, что $K_{(\alpha)}(D, Y)$ линейное пространство и

$$\bar{P}_k(f) = \int_T \sup_{x \in \bar{B}_k(D)} \|f(t, x)\| d\mu, \quad k \in N \quad (\bar{B}_k(D) \neq \emptyset)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на этом пространстве (т.е. для каждого $f \in \tilde{A}$, $f \neq 0$, найдется хотя бы одна полунорма \bar{P}_k , для которой $\bar{P}_k(f) \neq 0$). Поэтому по теореме 1.37[7,

с.35] семейство $\{\bar{P}_k\}$ индицирует локально выпуклую топологию τ со счетной локальной базой на пространстве $K_{(\alpha)}(D, Y)$.

Пусть $\psi: T \times D \rightarrow R_+$ каратеодориевская функция. Через $K_{(\alpha)}(\psi, D, Y)$ обозначим множество тех f из \tilde{A} , которые удовлетворяют условию:

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) + c \sum_{i=1}^s \|x_i\|^{\alpha_i} + b(t) \|x_{s+1}\|^p + c\psi(t, x)$$

при $x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}) \in D = D_1 \times \dots \times D_s \times D_{s+1}$ и $a(\cdot), b(\cdot) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T) : d(t) \geq 0 \text{ при } t \in T\}$, $p \geq 1$ и $c \geq 0$. Тогда положив $E = L_{(\alpha)}^{(n)}(T, D)$ и $S(\psi, E) = \{u \in L_{(\alpha)}^{(n)}(T, D) : \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty\}$ аналогично можно ввести топологию в $K_{(\alpha)}(\psi, D, Y)$.

3. Об обобщенных решениях задачи оптимизации

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с положительной конечной мерой, X и Z сепарабельные банаховы пространства, $f: T \times (Z \times X) \rightarrow \bar{R} = \Sigma^* \times B(Z \times X)$ -измеримая функция, т.е. измерима относительно σ -алгебры порожденной в $T \times (Z \times X)$ произведением множества из Σ^* и борелевского множества в $Z \times X$. Из теоремы 1.4.47[1] следует, что $B(Z \times X) = B(Z) \otimes B(X)$.

Пусть $E_0 \subset L_\alpha(T, X)$ и $A: E_0 \rightarrow L_\beta(T, Z)$ оператор, где $1 \leq \alpha \leq \infty, 1 \leq \beta \leq \infty$.

Рассмотрим задачу

$$\int_T f(t, Au(t), u(t)) d\mu \xrightarrow{u \in E_0} \inf \quad (3.1)$$

Пусть точка $u_0 \in E_0$ такая, что $\int_T f(t, Au_0(t), u_0(t)) d\mu < +\infty$ и обозначим

$$E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t)) d\mu \leq \int_T f(t, Au_0(t), u_0(t)) d\mu + \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, либо положим $E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t)) d\mu < +\infty\}$. Замыкание множества $\{Au : u \in E\}$

в $L_\beta(T, Z)$ обозначим через H и пусть существует $\Sigma^* \times B(X)$ -измеримая функция $\psi: T \times X \rightarrow [0, +\infty]$ такая, что интеграл $\int_T \psi(t, u(t)) d\mu$ существует и конечен при $u \in E$. Предположим, что $E \neq \emptyset$ и для каждого $k \in N$ для которого $B_k = \{u \in E : \|u\|_\alpha \leq k\} \neq \emptyset$ выполняется неравенство $\sup_{u \in B_k} \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty$.

Кроме того, для каждого $Z \in H$ найдутся $a_z(\cdot), b_z(t) \in L_1^+(T) = \{d(\cdot) \in L_1^+(T) : d(t) \geq 0\}$, $p \geq 1$ и $c_z \geq 0$ такие, что

$$|f(t, z(t), x)| \leq a_z(t) + c_z \|x\|^\alpha + c_z \psi(t, x), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty,$$

$$|f(t, z(t), x)| \leq a_z(t) + b_z(t) \|x\|^p + c_z \psi(t, x), \quad \text{если } \alpha = +\infty$$

при $t \in T, x \in X$. Например, можно считать, что

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + c(\|z\|^\beta + \|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty, 1 \leq \beta < \infty,$$

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + b(t) \|z\|^p + c(\|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty, \beta = +\infty,$$

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + b(t)(\|z\|^p + \|x\|^p) + c\psi(t, x), \quad \text{если } \alpha = +\infty, \beta = +\infty$$

при $t \in T, x \in X, z \in Z$, где $p \geq 1, a(\cdot) \in L_1^+(T), b(\cdot) \in L_1^+(T)$ и $c \geq 0$.

Замыкание множества $\{(Au, v_u) \in L_\beta(T, Z) \times M_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$ в $L_\beta(T, Z) \times M_\alpha^*(\psi, E)$ обозначим через Q_1 , а замыкание множества $\{(Au, v_u) \in L_\beta(T, Z) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$ в $L_\beta(T, Z) \times K_\alpha^*(\psi, E)$ обозначим через Q_2 .

Рассмотрим задачу

$$vf(t, z(t), x) \xrightarrow{(z, v) \in Q_1} \inf \quad (3.2)$$

а если $f(t, z(t), \cdot) \in K_\alpha(\psi, E)$ для любого $Z \in H$, то рассмотрим задачу

$$vf(t, z(t), x) \xrightarrow{(z, v) \in Q_2} \inf \quad (3.3)$$

Задачу (3.2) (соответственно (3.3)) назовем обобщенной задачей для задачи (3.1).

Если $A: E_0 \rightarrow L_\beta(T, Z)$ такой, что из $u_s \in E, u_s \xrightarrow{\text{сл.}} u$ в $L_\alpha^n(T)$ следует, что $Au_s \rightarrow A\bar{u}$ в $L_\beta^m(T)$, то положив $D(u) = \{v \in K_\alpha^*(\psi, E) : u_s \in E, u_s \xrightarrow{\text{сл.}} u \text{ в } L_\alpha^n(T), v_{u_s} \rightarrow v\}$ задачу (3.3) можно написать в таком виде $\inf_{u \in \text{cl } E} \inf_{v \in D(u)} \nu f(t, Au(t), x)$, где $\text{cl } E$ слабо замыкание множество E в $L_\alpha^n(T)$.

Замечание 3.1. Если $T \subset \mathbb{R}^\sigma$ ограниченное измеримое множество и из $\beta_i(t) \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=1}^m \beta_i(t) = 1$ и $u_i \in E$ при $i=1, \dots, m$ следует, что $\sum_{i=1}^m \beta_i(t) u_i(t) \in E$, где $\beta_i(t)$ измеримые функции, m натуральное число и $u \in E$, то из следствий 9.1.1 и 9.1.2[9] имеем, что

$$\tilde{D}(u) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_{u_i} \in K_\alpha^*(\psi, E) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, u_i \in E \right\} \subset D(u).$$

Аналогично [2] или [3] исследуется связь между задачами (3.1) и (3.2) (или (3.1) и (3.3)) и доказываем теоремы существования решения для задачи (3.2) (или для задачи (3.3)).

Обозначим $g(z, v) = \nu f(t, z(t), x)$. Отметим, что $S(\psi, E) = E$.

Замыкание $\{v_u : u \in E\}$ в топологии $M_\alpha^*(\psi, E)$ обозначим через N_1 , замыкание $\{v_u : u \in E\}$ в

$K_\alpha^*(\psi, E)$ обозначим через \bar{N}_1 . Если E ограниченное множество и $K_\alpha(\psi, E)$ замкнутое подпространство в $M_\alpha(\psi, E)$, то из теоремы Хана-Банаха в нормированном пространстве (см. [8, с.208]) и из определения $M_\alpha^*(\psi, E)$ и $K_\alpha^*(\psi, E)$ непосредственно следует, что $M_\alpha^*(\psi, E) = K_\alpha^*(\psi, E)$.

Предложение 3.1. Если $f(\cdot) \in L_1(T)$ и $\bar{v} \in N_1$, то $\bar{\nu} f = \int_T f(t) dt$.

Доказательство. Если $\varepsilon > 0$, то положим $U_\varepsilon(\bar{v}) = \{v \in M_\alpha^*(\psi, E) : |(v - \bar{v})f| \leq \varepsilon\}$. Так как \bar{v} является предельной точкой множества $\{v_u : u \in E\}$, то для любого $\varepsilon > 0$, $\{v_u : u \in E\} \cap U_\varepsilon(\bar{v}) \neq \emptyset$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$, существует функция $u \in E$ такая, что $|(v_u - \bar{v})f| \leq \varepsilon$, или $\left| \int_T f(t) dt - \bar{\nu} f \right| \leq \varepsilon$.

Отсюда следует, что $\bar{\nu} f = \int_T f(t) dt$. Предложение доказано.

Лемма 3.1. Если $f_1 : T \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ каратеодориевская функция и найдутся $a_1(\cdot) \in L_1^+(T)$ и $c \geq 0$ такие, что $\|f_1(t, z)\| \leq a_1(t) + c\|z\|^\beta$ при $z \in Z$, $f_2 \in M_\alpha(\psi, E)$ ($f_2 \in K_\alpha(\psi, E)$), где $1 \leq \beta < +\infty$, $1 \leq \alpha < +\infty$, $f(t, z, x) = f_1(t, z) + f_2(x, u)$, то функционал $g(z, v)$ непрерывен в $L_\beta(T, Z) \times N_1(L_\beta(T, Z) \times \bar{N}_1)$.

Доказательство. Пусть $(\bar{z}, \bar{v}) \in L_\beta(T, Z) \times N_1$ и $\varepsilon > 0$. По следствию 2.1 для $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$

такое, что $\left| \int_T f_1(t, z(t)) dt - \int_T f_1(t, \bar{z}(t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $\|z(\cdot) - \bar{z}(\cdot)\|_{L_\beta} \leq \delta_1$. Возьмем $\delta = \min \{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Используя предложения 3.1 имеем, что

$$\begin{aligned} |\nu f(t, z(t), x) - \bar{\nu} f(t, \bar{z}(t), x)| &\leq |\nu f_1(t, z(t)) - \bar{\nu} f_1(t, \bar{z}(t))| + |(v - \bar{v})f_2(x, u)| \leq \\ &\leq \left| \int_T f_1(t, z(t)) dt - \int_T f_1(t, \bar{z}(t)) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

при $(z, v) \in \{(z, v) : \|z(\cdot) - \bar{z}(\cdot)\|_{L_\beta} \leq \delta, |(v - \bar{v})f_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Лемма доказана.

Рассмотрим другой вариант леммы 3.1.

Лемма 3.2. Если $f_1 : T \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ каратеодориевская функция и найдутся $a_1(\cdot) \in L_1^+(T)$ и $c \geq 0$ такие, что $|f_1(t, z)| \leq a_1(t) + c\|z\|^\beta$ при $z \in Z$, $f_2 \in M_\alpha(\psi, E)$, $f(t, z, x) = f_1(t, z) + f_2(x, u)$, где $1 \leq \beta < +\infty$, $1 \leq \alpha < +\infty$, и последовательность $\{(z_i, v_i)\} \in L_\beta(T, Z) \times N_1$ сходится к (\bar{z}, \bar{v}) в $L_\beta(T, Z) \times M_\alpha^*(\psi, E)$, то

$$v_i f(t, z_i(t), x) \rightarrow \bar{\nu} f(t, \bar{z}(t), x),$$

т.е. функционал $g(z, v)$ секвенциально непрерывен в $L_\beta(T, Z) \times N_1$.

Доказательство. Если последовательность $\{(z_i, v_i)\} \in L_\beta(T, Z) \times N_1$ сходится к (\bar{z}, \bar{v}) в $L_\beta(T, Z) \times M_\alpha^*(\psi, E)$, то ясно, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} v_i f(t, z_i(t), x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\int_T f_1(t, z_i(t)) dt + v_i f_2(t, x) \right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_T f_1(t, z_i(t)) dt + \bar{v} f_2(t, x).$$

Используя следствие 2.1 имеем, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_T f_1(t, z_i(t)) dt = \int_T f_1(t, \bar{z}(t)) dt.$$

Поэтому

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} v_i f(t, z_i(t), x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_T f_1(t, z_i(t)) dt + \bar{v} f_2(t, x) = \int_T f_1(t, \bar{z}(t)) dt + \bar{v} f_2(t, x) = \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x).$$

Лемма доказана.

Обозначим $L_\beta^m(T) = L_\beta(T, \mathbb{R}^m)$, $L_\alpha^n(T) = L_\alpha(T, \mathbb{R}^n)$.

Лемма 3.3. Пусть функция $\psi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ непрерывна в $\text{dom } \psi(t, \cdot)$ почти для всех $t \in T$, $\psi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ удовлетворяют вышесказанным условиям, $f : T \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ каратеодориевская функция и

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + c(\|z\|^\beta + \|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty, 1 \leq \beta < \infty,$$

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + b(t)\|z\|^p + c(\|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad p \geq 1, \text{ если } 1 \leq \alpha < +\infty, \beta = +\infty$$

при $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, где $p \geq 1$, $a(\cdot) \in L_1^+(T)$, $b(\cdot) \in L_1^+(T)$ и $c \geq 0$.

Тогда, если последовательность $\{(z_i, v_{u_i})\} \in L_\beta^m(T) \times \bar{N}_1$ сходится к (\bar{z}, \bar{v}) в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$, где $(z_i, u_i) \in L_\beta^m(T) \times E$ при $i = 1, 2, \dots$, то $v_{u_i} f(t, z_i(t), x) \rightarrow \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)$.

Доказательство. Пусть $1 \leq \alpha < +\infty$, $1 \leq \beta < \infty$ и $\{(z_i, v_{u_i})\} \in L_\beta^m(T) \times \bar{N}_1$ сходится к (\bar{z}, \bar{v}) в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$. Так как

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (v_{u_i} f(t, z_i(t), x) - \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} (v_{u_i} f(t, z_i(t), x) - v_{u_i} f(t, \bar{z}(t), x) + \\ &+ v_{u_i} f(t, \bar{z}(t), x) - \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} (v_{u_i} f(t, z_i(t), x) - v_{u_i} f(t, \bar{z}(t), x)), \end{aligned}$$

то достаточно доказать, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_T f(t, z_i(t), u_i(t)) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_T f(t, \bar{z}(t), u_i(t)) dt$. Ясно, что

$$f(t, z_i(t), u_i(t)) - f(t, \bar{z}(t), u_i(t)) = h_i(t) \leq q_i(t) = 2a(t) + 2c\psi(t, u_i(t)) + c(\|z_i(t)\|^\beta + \|\bar{z}(t)\|^\beta + 2\|u_i(t)\|^\alpha + \|u_i(t)\|).$$

По условию $\{z_i\} \in L_\beta^m(T)$ сходится к \bar{z} в $L_\beta^m(T)$, то из теоремы 1.34 [7, с.34] и теоремы 1.5.13 [1, с.145], а также из [9, с.290] следуют, что $\|z_i(t)\|$ и $\|z_i(t)\|^\beta$ равномерно интегрируемы. Так как $e(t)\psi \in K_\alpha(\psi, E)$ при $e(\cdot) \in L_\infty(T)$, то $\int_T e(t)\psi(t, u_i(t)) dt \rightarrow \bar{v} e(t)\psi(t, u)$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\{\psi(t, u_i(t))\}$ секвенциально слабо фундаментальны в $L_1(T)$. Так как $L_1(T)$ секвенциально слабо полно [10, с.44], поэтому $\{\psi(t, u_i(t))\}$ равномерно интегрируемы.

Так как $\|\cdot\|^\alpha \in K_\alpha(\psi, E)$ и $\|\cdot\| \in K_\alpha(\psi, E)$ аналогично получим, что $\|u_i(t)\|^\alpha$ и $\|u_i(t)\|$ также равномерно интегрируемы. Отсюда следует, что $\{q_i(t)\}$ и поэтому $\{h_i(t)\}$ равномерно интегрируемы. Применяя теорему [11, с.31], получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k > 0$, что $\int_{\{t \in T: q_i(t) \geq k\}} h_i(t) dt < \frac{1}{2} \varepsilon$. Не

умалая общности можно считать, что z_i сходится к \bar{z} почти всюду. По теореме 1.2.15[1] для почти всех $t \in T$ имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t, z_i(t), x) = f(t, \bar{z}(t), x)$ равномерно для $\{x : \|x\| \leq k\}$. Так как

$\{t \in T : \|u_i(t)\| \leq k\} \supset \{t \in T : \|q_i(t)\| \leq k\}$, то отсюда получим, что $h_i(t)$ сходится к нулю почти всех

$t \in T_k^i = \{t \in T : q_i(t) \leq k\}$. Положив $E_i^k(t) = \begin{cases} 1: t \in T_k^i \\ 0: t \notin T_k^i \end{cases}$ имеем, что $h_i(t)E_i^k(t)$ сходится к нулю почти всех

$t \in T$ и $h_i(t)E_i^k(t)$ равномерно интегрируемое семейство. Поэтому $h_i(t)E_i^k(t)$ слабо сходится к нулю.

Тогда получим, что $\int_T h_i(t)E_i^k(t) dt = \int_{T_k^i} h_i(t) dt$ сходится к нулю, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое

$i_0 > 0$, что $\int_{T_k^i} h_i(t) dt < \frac{1}{2} \varepsilon$ при $i > i_0$. Так как $h_i(t)$ равномерно интегрируемое семейство, то

$\int_{T \setminus T_k^i} h_i(t) dt \rightarrow 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $i_1 > 0$, что $\int_{T \setminus T_k^i} h_i(t) dt < \frac{1}{2} \varepsilon$ при $i > i_1$. Получим, что

$$\int_T h_i(t) dt < \varepsilon \text{ для любого } i > \max\{i_0, i_1\}, \text{ т.е. } v_{u_i} f(t, z_i(t), x) \rightarrow \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x).$$

Аналогично проверяется случай $\beta = \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Если $E \subset L_\alpha^n(T)$ ограниченное множесво и $K_\alpha(\psi, E)$ сепарабельно, то при условии леммы 3.3 функционал $g(z, v)$ непрерывен и секвенциально непрерывен в Q_2 .

Доказательство. Так как $E \subset L_\alpha^n(T)$ ограниченное множесво, то существует такое натуральное число k , что $\|u\|_{L_\alpha^n(T)} \leq k$ при $u \in E$. Положим $\Omega_k = \{f : P_k(f) \leq 1\}$. Ясно, что $\{v_u : u \in E\} \subset \Omega_k^0$ и по теореме 3.16[7] Ω_k^0 метризуемы относительно $\sigma(K_\alpha^*(\psi, E), K_\alpha(\psi, E))$ топологией. Так как $Q_2 \subset L_\beta^m(T) \times \Omega_k^0$ и в Q_2 топология совпадает с индуцированной из $L_\beta^m(T) \times \Omega_k^0$ топологией, то Q_2 метризуемы. Эту метрики обозначим через ρ . Пусть (z_s, v_s) любая последовательность в Q_2 и (z_s, v_s) сходится к (z, v) . Покажем, что $g(z_s, v_s) \rightarrow g(z, v)$. По условию множество $\{(Au, v_u) \in L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$ плотно в Q_2 , поэтому для (z_s, v_s) существует такое $(Au_s, v_{u_s}) \in L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E$, что $\rho((z_s, v_s), (Au_s, v_{u_s})) < \frac{1}{s}$ и $|g(z_s, v_s) - g(Au_s, v_{u_s})| < \frac{1}{s}$. Так как $\rho((z, v), (Au_s, v_{u_s})) < \rho((z, v), (z_s, v_s)) + \rho((z_s, v_s), (Au_s, v_{u_s}))$ при $(z, v) \in Q_2$, то (Au_s, v_{u_s}) сходится к (z, v) . По лемме 3.3 получим, что $g(Au_s, v_{u_s})$ сходится к $g(z, v)$, поэтому из соотношения $g(Au_s, v_{u_s}) - \frac{1}{s} < g(z_s, v_s) < g(Au_s, v_{u_s}) + \frac{1}{s}$ следует, что $g(z_s, v_{u_s})$ сходится к $g(z, v)$, т.е. функционал $g(z, v)$ непрерывен в Q_2 . Лемма доказана.

Замечание 3.2. Пусть функция $\psi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ непрерывна в $\text{dom} \psi(t, \cdot)$ почти для всех $t \in T$, $\psi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ удовлетворяют выше сказанным условиям, $f : T \times \mathbb{R}^m \times \text{dom} \psi(t, \cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ каратеодориевская функция. Ясно, что $\{2a(t) + 2c\psi(t, u) + c(\|z_i(t)\|^\beta + \|\bar{z}(t)\|^\beta) + 2\|u\|^\alpha + \|u\| \leq k\} \subset \{u : \|u\| \leq k\}$. Так как $\text{dom} \psi(t, \cdot)$ почти для всех $t \in T$ замкнуто, то используя из теоремы продолжения типа Уитни (см. [12, с.205]) имеем, что если условие $f : T \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ каратеодориевская функция, заменить условием для почти всех $t \in T$ функция $f(t, \cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^m \times \text{dom} \psi(t, \cdot)$ непрерывна, то лемма 3.4 остается также справедливой.

Лемма 3.5. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с положительной конечной полной мерой, $f(t, z, x) = f_1(t, z, x) + \delta_U(x)$, где U компактное множество в X , $\delta_U(x) = \begin{cases} 0 : x \in U \\ +\infty : x \notin U \end{cases}$, функция $t \rightarrow f_1(t, z, x)$ измерима в T , функция $(z, x) \rightarrow f_1(t, z, x)$ непрерывна в $Z \times U$ для почти всех $t \in T$, существует суммируемая функция $a(t)$ такая, что $|f(t, z, x)| \leq a(t)$ при $(t, z, x) \in T \times Z \times U$. Тогда, если $\psi(t, x) = \delta_{T \times U}(t, x)$, $z_i \in L_\beta(T, Z)$, $v_i \in \text{cl}\{v_u : u \in S(\psi, E)\}$ и (z_i, v_i) сходится к (\bar{z}, \bar{v}) в $L_\beta(T, Z) \times K_\alpha^*(\psi, E)$, то $v_i f(t, z_i(t), x) \rightarrow \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)$.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что z_i сходится к \bar{z} почти всюду. По теореме 1.2.15[1] для почти всех $t \in T$ имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t, z_i(t), x) = f(t, \bar{z}(t), x)$ равномерно для $x \in U$. По теореме 6 [13] существуют измеримые функции $u_i : T \rightarrow U$ такие, что

$$\sup_{u \in L_\infty(T, X), u(t) \in U} \int_T |f(t, z_i(t), u(t)) - f(t, \bar{z}(t), u(t))| dt = \int_T |f(t, z_i(t), u_i(t)) - f(t, \bar{z}(t), u_i(t))| dt.$$

Ясно, что $\lim_{i \rightarrow \infty} |f(t, z_i(t), x) - f(t, \bar{z}(t), x)| = 0$ при $x \in U$ и $|f(t, z_i(t), u_i(t)) - f(t, \bar{z}(t), u_i(t))| \leq 2a(t)$, поэтому используя теорему Лебега (см. [6]) получим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_T |f(t, z_i(t), u_i(t)) - f(t, \bar{z}(t), u_i(t))| dt = 0$. Тогда имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{u \in L_\infty(T, X), u(t) \in U} \int_T |f(t, z_i(t), u(t)) - f(t, \bar{z}(t), u(t))| dt = 0,$$

т.е. $f(t, z_i(t), x)$ сходится к $f(t, \bar{z}(t), x)$ в $K_\alpha(\psi, E)$, т.е. $\|f(t, z_i(t), x) - f(t, \bar{z}(t), x)\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Так как $K_\alpha(\psi, E)$ нормированное пространство, то

$$\begin{aligned} |v_i f(t, z_i(t), x) - \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)| &\leq |v_i f(t, z_i(t), x) - v_i f(t, \bar{z}(t), x)| + |v_i f(t, \bar{z}(t), x) - \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)| \leq \\ &\leq \|v_i\| \|f(t, z_i(t), x) - f(t, \bar{z}(t), x)\| + |(v_i - \bar{v}) f(t, \bar{z}(t), x)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $v_i f(t, z_i(t), x) \rightarrow \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x)$. Лемма доказана.

Для простоты далее считаем, что $Z = \mathbb{R}^m$ и $X = \mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать только задачи (3.3). Аналогично исследуется задача (3.2).

Теорема 3.1. Пусть $\psi: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ удовлетворяют вышесказанным условиям, $f: T \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ каратеодориевская функция и

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + c(\|z\|^\beta + \|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty, 1 \leq \beta < \infty,$$

$$|f(t, z, x)| \leq a(t) + b(t)\|z\|^p + c(\|x\|^\alpha + \psi(t, x)), \quad \text{если } 1 \leq \alpha < +\infty, \beta = +\infty,$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) Пусть E ограниченное подмножество в $L_\alpha^n(T)$ и оператор A переводит E в относительно компактное подмножество в $L_\beta^m(T)$, т.е. $clAE$ компактное множество в $L_\beta^m(T)$.

2) Оператор A переводит ограниченное подмножество из E в относительно компактные множества в $L_\beta^m(T)$ и существует функция $\varphi: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, где $\int_T \varphi(t, u(t)) d\mu \rightarrow +\infty$ при $\|u\|_\alpha \rightarrow +\infty$ такая, что $\varphi(t, x) \leq f(t, z, x)$ при $(t, z, x) \in T \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

3) Существует борелевская функция $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, где $\lim_{\tau} \frac{h(\tau)}{\tau} \rightarrow +\infty$, и $a(\cdot) \in L_1(T)$ такие, что $h(\|x\|) \leq \psi(t, x)$, $a(t) + \psi(t, x) \leq f(t, z, x)$ и если $\{u_s\} \subset E$ сходится к $u(\cdot)$ в топологии $\sigma(L_1^n(T), L_\infty^n(T))$ и выполняется неравенство $\sup_{s \in N} \int_T h(\|u_s(t)\|) d\mu < +\infty$, то последовательность $\{Au_s\}$ сходится к $Au(\cdot)$ в $L_\beta^m(T)$.

4) Если последовательность $\{u_s\}$ из E и $\{Au_s\}$ ограничено в пространствах $L_\alpha^n(T)$ и $L_\beta^m(T)$ соответственно, то из последовательности $\{Au_s\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится в $L_\beta^m(T)$ и $\int_T f(t, z(t), u(t)) d\mu \rightarrow +\infty$ при $\|z(\cdot)\|_{L_\beta^m(T)} + \|u(\cdot)\|_{L_\alpha^n(T)} \rightarrow +\infty$.

Тогда если функционал $g(z, v)$ непрерывен в Q_2 , то задачи (3.1) и (3.3) имеют одинаковые значения. Задачи (3.3) имеют решения, эти решения являются предельными точками последовательностей (Au_j, v_{u_j}) в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$, где $\{u_j\}$ есть минимизирующие последовательности задачи (3.1).

Доказательство. Пусть выполняется 2). По условию существует точка $u_0 \in E_0$ такая, что $\int_T f(t, Au_0(t), u_0(t)) d\mu < +\infty$. Обозначим $E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t)) d\mu \leq \int_T f(t, Au_0(t), u_0(t)) d\mu\}$. Из условия 2) следует, что E ограниченное множество $L_\alpha^n(T)$. Тогда из леммы 2.6 следует, что Q_2 компактное множество в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$. Так как функционал $g(z, v)$ непрерывен в Q_2 , то достигает минимума в некоторой точке $(\bar{z}, \bar{v}) \in Q_2$.

По условию $(\bar{z}, \bar{v}) \in cl\{(Au, v_u) \in L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$, поэтому для каждого число $\frac{1}{n}$ существует точка $(Au_i, v_{u_i}) \in \{(Au, v_u) \in L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$ такая, что $|g(Au_i, v_{u_i}) - g(\bar{z}, \bar{v})| < \frac{1}{n}$, т.е. последовательность $\{u_i\}$ есть минимизирующие последовательности задачи (3.1). Обратно, если $\{u_i\}$ является минимизирующей последовательностью задачи (3.1), то существует $(\bar{z}, \bar{v}) \in cl\{(Au, v_u) \in L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E) : u \in E\}$, что (\bar{z}, \bar{v}) является решением задачи (3.3).

Пусть выполняется 1). Из условия 1) теоремы 3.1 следует, что Q_2 компактно в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$. Так как функционал $g(z, v)$ непрерывен в Q_2 , то достигает минимума в некоторой точке $(\bar{z}, \bar{v}) \in Q_2$. Далее доказательство 1) теоремы 3.1 аналогично доказательству 2) теоремы 3.1.

Доказательство 3) и 4) теоремы 3.2 аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Если в теореме 3.1 функционал $g(z, v)$ полунепрерывен снизу в Q_2 , то $g(z, v)$ достигает минимума на множестве Q_2 в некоторой точке $(\bar{z}, \bar{v}) \in Q_2$.

Замечание 3.4. Если A линейный непрерывный оператор из $L_1^n(T)$ в $L_\beta^m(T)$, где $1 < \beta \leq +\infty$, то A удовлетворяет условиям теоремы 3.1 (см. также [9, с.248]).

Пусть $T \subset \mathbb{R}^\sigma$ открытое ограниченное множество, $\sigma \in \mathbb{N}$, $d\mu = dt$, $X = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$.

В задаче (3.1) возьмем $E_0 = L_\alpha^n(T)$, где $1 < \alpha < +\infty$.

Положим либо $E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t))dt \leq \int_T f(t, Au_0(t), u_0(t))dt + \varepsilon\}$ для некоторого $u \in E_0$, либо $E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t))dt < +\infty\}$. Пусть $\psi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ нормальный интегрант. Считаем, что $E \neq \emptyset$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ для которого $B_k = \{u \in E : \|u\|_\alpha \leq k\} \neq \emptyset$ выполняется неравенство $\sup_{u \in B_k} \int_T \psi(t, u(t))dt < +\infty$. Кроме того, для E выполняется условие замечания 3.1.

Теорема 3.2. Пусть $\psi : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ нормальный интегрант, $f : T \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ каратеодориевская функция, $\|x\|^\alpha \leq \psi(t, x)$, где $1 < \alpha < +\infty$, существуют $a_0(\cdot), a(\cdot), b(\cdot) \in L_1(T)$, $p \geq 1, c \geq 1$ такие, что

$$a_0(t) + \psi(t, x) \leq f(t, z, x) \leq a(t) + c(\|z\|^\beta + \|x\|^\alpha + \psi(t, x)) \text{ при } (z, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \text{ если } 1 \leq \beta < \infty,$$

$$a_0(t) + \psi(t, x) \leq f(t, z, x) \leq a(t) + b(t)\|z\|^p + c(\|x\|^\alpha + \psi(t, x)) \text{ при } (z, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \text{ если } \beta = +\infty.$$

Кроме того пусть выполнено следующее условие: если $\{u_s\} \subset E$ сходится к $u(\cdot)$ в топологии $\sigma(L_\alpha^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$, то последовательность $\{Au_s\}$ сходится к $Au(\cdot)$ в $L_\beta^m(T)$.

Тогда задачи (3.1), где $E_0 = L_\alpha^n(T)$, и задачи

$$\int_T f^{**}(t, Au(t), u(t))dt \xrightarrow{u \in L_\alpha^n(T)} \inf \quad (3.4)$$

имеет одинаковые значения. Задача (3.4) имеет решение и если \bar{u} решение задачи (3.4), то существует минимизирующая последовательность $\{u_s\}$ задачи (3.1) сходящаяся к \bar{u} в топологии $\sigma(L_\alpha^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$ и $Au_s \rightarrow A\bar{u}$ в $L_\beta^m(T)$. Если $\{u_s\}$ есть минимизирующая последовательность задачи (3.1), то существует решение \bar{u} задачи (3.4) и подпоследовательность $u_{s'}$ такая, что $u_{s'} \rightarrow \bar{u}$ в топологии $\sigma(L_\alpha^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$ и $Au_{s'} \rightarrow A\bar{u}$ в $L_\beta^m(T)$.

Доказательство. Положив $E = \{u \in E_0 : \int_T f(t, Au(t), u(t))dt < +\infty\}$, по условию имеем, что

$$\inf_{u \in E_0} \int_T f(t, Au(t), u(t))dt = \inf_{u \in E} \int_T f(t, Au(t), u(t))dt. \quad (3.5)$$

Замыкание множества $A_0 = \{(Au, v_u) : u \in E\}$ в $L_\beta^m(T) \times K_\alpha^*(\psi, E)$ обозначим через A_1 и рассмотрим задачу

$$vf(t, z(t), x) \xrightarrow{(z, v) \in A_1} \inf. \quad (3.6)$$

Ясно, что задача (3.6) является обобщенной задачей к задаче (3.5) и по лемме 3.2 и теореме 3.1, где $h(\tau) = \tau^\alpha$, задачи (3.5) и (3.6) имеют одинаковые значения. Кроме того, задача (3.6) имеет решения. Пусть (\bar{z}, \bar{v}) является решением задачи (3.6). Покажем, что существует минимизирующее решение \bar{u} задачи (3.4) такое, что $\bar{z} = A\bar{u}$. Действительно, существует $u_s \in E$ такая, что (\bar{z}, \bar{v}) является предельной для последовательности $\{(Au_s, v_{u_s})\}$. Ясно, что $\{u_s(\cdot)\}$ минимизирующая последовательность задачи (3.1) и v_{u_s} сходится к \bar{v} в топологии $\sigma(K_\alpha^*(\psi, E), K_\alpha(\psi, E))$. Так как $\langle e(t), x \rangle \in K_\alpha(\psi, E)$ при $e(\cdot) \in L_{\alpha'}^n(T)$, то $v_{u_s}(\langle e(t), x \rangle) = \int_T \langle e(t), u_s(t) \rangle dt \rightarrow \bar{v}(\langle e(t), x \rangle)$ при $s \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\{u_s(t)\}$ слабо фундаментальны в $L_\alpha^n(T)$. Из следствия 3 (см. [6, с.313]) следует, что $L_\alpha^n(T)$ слабо полны при $1 < \alpha < +\infty$. Поэтому существует функция $\bar{u}(\cdot) \in L_\alpha^n(T)$ такая, что $\{u_s(\cdot)\}$ сходится к $\bar{u}(\cdot)$ в топологии $\sigma(L_\alpha^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$. Тогда имеем, что $\bar{z} = A\bar{u}$.

Если $u \in c1E$, то положим $D(u) = \{v \in K_\alpha^*(\psi, E) : u_s \in E, u_s \xrightarrow{cl.} u \text{ в } L_\alpha^n(T), v_{u_s} \rightarrow v\}$, где $c1E$ слабо замыкание множество E в $L_\alpha^n(T)$. Ясно, что

$$\inf_{(z, v) \in A_1} vf(t, z(t), x) = \inf_{u \in c1E} \inf_{v \in D(u)} vf(t, Au(t), x).$$

Из следствий 9.1.1 и 9.1.2[9] имеем, что

$$\tilde{D}(u) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_{u_i} \in K_{\alpha}^*(\psi, E) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, u_i \in E \right\} \subset D(u).$$

Поэтому

$$\inf_{v \in D(u)} v f(t, Au(t), x) \leq \inf_{v \in \tilde{D}(u)} v f(t, Au(t), x) = \inf_{\substack{\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, \alpha_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, u_i \in E}} \inf_{v \in \tilde{D}(u)} v f(t, Au(t), x) = \inf_{\substack{\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, \alpha_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, u_i \in E}} \int_T f(t, Au(t), u_i(t)) dt.$$

Тогда применяя следствие 3.3.2[14] и теоремы 8.3.1[14] получим, что

$$\begin{aligned} \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x) &= \inf_{u \in E} \int_T f(t, Au(t), u(t)) dt = \inf_{u \in \text{cl } E} \inf_{v \in D(u)} v f(t, Au(t), x) = \inf_{\substack{\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, \alpha_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, u_i \in E}} \inf_{v \in \tilde{D}(u)} v f(t, Au(t), x) = \\ &= \inf_{\substack{u \in \text{cl } E \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = u, \alpha_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, u_i \in E}} \inf_{v \in \tilde{D}(u)} \int_T f(t, Au(t), u_i(t)) dt = \inf_{u \in \text{cl } E} \int_T f^{**}(t, Au(t), u(t)) dt = \int_T f^{**}(t, A\bar{u}(t), \bar{u}(t)) dt, \end{aligned}$$

(см. также теоремы 8.2.1 и 8.2.2[9]). Таким образом, задачи (3.4) и (3.6) имеют одинаковые значения. Задача (3.4) имеет решения.

Так как A_0 плотно в A_1 , то существует последовательность $\{(Au_s, v_{u_s})\}$ такая, что

$$\|Au_s - A\bar{u}\|_{L_{\beta}^m(G)} < \frac{1}{s} \quad \text{и} \quad \left| \bar{v} f(t, \bar{z}(t), x) - v_{u_s} f(t, Au_s(t), x) \right| < \frac{1}{s}, \quad \text{т.е.}$$

$$\bar{v} f(t, \bar{z}(t), x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_T f(t, Au_s(t), u_s(t)) dt.$$

Получим, что $\{u_s\}$ является минимизирующая последовательность задачи (3.1). По условию существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\|u_s(\cdot)\|_{L_{\alpha}^n(T)} \leq k$ при $s \in \mathbb{N}$. Поэтому существует подпоследовательность $\{u_{s'}\} \subset \{u_s\}$, которая сходится к некоторому $\bar{u} \in L_{\alpha}^n(G)$ в топологии $\sigma(L_{\alpha}^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$. Ясно, что $\{Au_{s'}\}$ сходится к $A\bar{u}$ в $L_{\beta}^m(T)$.

Пусть $\{u_s\}$ минимизирующей последовательности задачи (3.1). Согласно теореме 3.1 существует решение задачи (3.6) и пусть пара (\bar{z}, \bar{v}) является минимизирующим решением задачи (3.6), которая является предельной точкой последовательности $\{(Au_s, v_{u_s})\}$ в $L_{\beta}^m(T) \times K_{\alpha}^*(\psi, E)$. Тогда $u_s \rightarrow \bar{u}$ в топологии $\sigma(L_{\alpha}^n(T), L_{\alpha'}^n(T))$, $Au_s \rightarrow A\bar{u}$ в $L_{\beta}^m(G)$. Из доказательства первой части теоремы следует, что $\bar{u}(\cdot)$ является решением задачи (3.4). Теорема доказана.

Если существует функция $u_0(\cdot) \in L_{\alpha}^n(T)$ такая, что $E = \{u \in L_{\alpha}^n(T) : \int_T \psi(t, u(t)) dt \leq \int_T \psi(t, u_0(t)) dt\}$ ограниченное множество в $L_{\alpha}^n(G)$, то неравенство $\sup_{u \in E} \int_T \psi(t, u(t)) d\mu < +\infty$ выполняется.

Отметим, что теорема 3.2 является аналогом теоремы 9.4.1[9].

Замечание 3.5. Все результаты п.3 можно обобщить в том случае, когда X и Z рефлексивные сепарабельные банаховы пространства.

4. Обобщенные задачи для вариационных задач

Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ ограниченная область и принадлежит класса $C^{0,1}$ (см.[15]), $\varphi : \partial G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $f : G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$ нормальные интегранты, $z_x(\cdot) = (z_{x_1}(\cdot), \dots, z_{x_k}(\cdot))$, $x = (x_1, \dots, x_k)$. Положим $W_{\alpha}^1(G) = \{z(\cdot) \in L_{\alpha}(G) : z_x(\cdot) \in L_{\alpha}^k(G)\}$ и $W_{\alpha,1}^n(G) = (W_{\alpha}^1(G))^n$, где $1 < \alpha < +\infty$. На границе ∂G области G можно также рассмотреть пространство функций $B_{\alpha}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G)$ при $1 < \alpha < +\infty$ (см.[10, с.82]), где $z|_{\partial G} \in B_{\alpha}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G)$ при $z \in W_{\alpha}^1(G)$. Положим $B_{\alpha,n}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G) = (B_{\alpha}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G))^n$. Если $Q \subset W_{\alpha,1}^n(G)$, то рассмотрим задачу

$$F(z) = \int_{\partial G} \varphi(s, z(s)) ds + \int_G f(x, z(x), z_x(x)) dx \xrightarrow{z(\cdot) \in Q} \inf. \quad (4.1)$$

Обозначим $Q \cap \text{dom } F = \{z \in Q : |F(z)| < +\infty\}$. Далее через H обозначим либо множество $Q \cap \text{dom } F$, либо множество $\{z \in Q : F(z) \leq F(z_0) + \varepsilon\}$ для некоторого $z_0 \in Q \cap \text{dom } F$ и $\varepsilon > 0$. Через \bar{H} обозначим замыкание множества H в $L_{\alpha}^n(G)$. Пусть существуют функция $\psi(x, u) : G \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) \in L_1(G)$ и $c > 0$ такие, что $|f(x, z, u)| \leq a(x) + c(\|z\|^{\alpha} + \|u\|^{\alpha} + \psi(x, u))$, где $1 < \alpha < +\infty$, $T = G$. Положим $E = \{z_x(x) \in L_{\alpha}^{nk}(G) : z(\cdot) \in H\}$ и

$$S(\psi, E) = \{u \in E : \int_G \psi(x, u(x)) dx < +\infty\}.$$

Пусть $S(\psi, E) \neq \emptyset$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ для которого $B_k = \{u \in S(\psi, E) : \|u\|_{L_{\alpha}^{nk}(G)} \leq k\} \neq \emptyset$, выполняется неравенство $\sup_{u \in B_k} \int_G \psi(x, u(x)) dx < +\infty$. Ясно, что

$$P_k(g) = \sup_{u \in B_k} \int_G |g(x, u(x))| dx, \quad k \in \mathbb{N} \quad (B_k \neq \emptyset)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на пространстве $M_{\alpha}(\psi, E)$ (см. п.2). Предположим, что $E = S(\psi, E)$ и обозначим

$$A_0 = \{(z|_{\partial G}, z, v_{z_x}) \in B_{\alpha, n}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G) \times W_{\alpha, 1}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in H\}.$$

Замыкание множества A_0 в $B_{\alpha, n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E)$ обозначим через A_1 , где $B_{\alpha, n}^0(\partial G) = L_{\alpha}^n(\partial G)$ при $1 < \alpha \leq n$, $B_{\alpha, n}^0(\partial G) = C^n(\partial G)$ при $\alpha > n$. Рассмотрим задачу

$$g(u, z, v) = \int_{\partial G} \varphi(s, v(s)) ds + \int_G \psi(x, z(x), u) \xrightarrow{(v(\cdot), z(x), v) \in A_1} \inf. \quad (4.2)$$

Задачу (4.2) назовем обобщенной задачей к задаче (4.1).

Отметим, что если $\varphi \equiv 0$, то $A_0 = \{(z, v_{z_x}) \in W_{\alpha, 1}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in H\}$ и A_1 является замыканием множества A_0 в $L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E)$. Кроме того, $g(u, z, v) = g(z, v)$.

Положим $\dot{W}_{\alpha, 1}^n(G) = \{u \in W_{\alpha, 1}^n(G) : u|_{\partial G} = 0\}$, где $u|_{\partial G} \in B_{\alpha, n}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\partial G)$ при $u \in W_{\alpha, 1}^n(G)$.

Из теоремы 5.19 [16, с.102] следует, что если $1 < \alpha \leq n$, то оператор $\gamma_0 \in L(W_{\alpha, 1}^n(G), L_q^n(\partial G))$ компактен при $1 \leq q \leq \frac{(n-1)\alpha}{n-\alpha}$. Поэтому можно взять и $q = \alpha$. Если $\alpha > n$, то из теоремы 5.17 [16, с.102] следует, что оператор $\gamma_0 \in L(W_{\alpha, 1}^n(G), C^n(\partial G))$ компактен.

Теорема 4.1. Пусть выполняются вышесказанные условия, $1 < \alpha < +\infty$ и выполнено одно из следующих условий:

- 1) Пусть существуют функции $\varphi_1 : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $\varphi_2 : G \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, где $\int_G \varphi_1(x, z(x)) dx \rightarrow +\infty$ при $\|z\|_{L_{\alpha}^n(G)} \rightarrow +\infty$ и $\int_G \varphi_2(x, u(x)) dx \rightarrow +\infty$ при $\|u\|_{L_{\alpha}^{nk}(G)} \rightarrow +\infty$ такие $\varphi_1(x, z) + \varphi_1(x, u) \leq f(x, z, u)$.
- 2) Пусть $\varphi \equiv 0$, Q ограниченное множество или $Q \subset Q_1 + \dot{W}_{\alpha, 1}^n(G)$, где Q_1 ограниченное множество в $W_{\alpha, 1}^n(G)$ и существует функция $\varphi_0 : G \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, где $\int_G \varphi_0(x, u(x)) dx \rightarrow +\infty$ при $\|u\|_{L_{\alpha}^{nk}(G)} \rightarrow +\infty$ такая, что $\varphi_0(x, u) \leq f(x, z, u)$.

Тогда если функционал $g(u, z, v)$ ($g(z, v)$) непрерывен в A_1 , то задачи (4.1) и (4.2) имеют одинаковые значения. Задачи (4.2) имеют решения, эти решения являются предельными точками в $B_{\alpha, n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E)$ последовательностей $(z_s|_{\partial G}, z_s, v_{z_s})$, где $\{z_s\}$ является минимизирующей последовательностью задачи (4.1).

Доказательство. Пусть выполняется 1). Через H обозначим множество $\{z \in Q : F(z) \leq F(z_0) + \varepsilon\}$ для некоторого $z_0 \in Q \cap \text{dom } F$ и $\varepsilon > 0$. По условию имеем, что H ограниченное множество в пространстве $W_{\alpha, 1}^n(G)$. Размерностью нормы в пространствах $W_{\alpha, 1}^n(G)$ называется число $\chi = \frac{n}{\alpha} - 1$. Если $q = \alpha$, то $\frac{n}{\alpha} - 1 < \frac{n}{q}$. Так как $q = \alpha$, то из [10, с.83] следует, что пространство $W_{\alpha, 1}^n(G)$ компактно вложено в пространство $L_{\alpha}^n(G)$ (см. также теорему 1.4.6 [15, с.66] Реллиха). Тогда применяя теорему о следах [10, с.82] теорему 5.19 [16, с.102], теорему 1.4.6 [15, с.66] и лемму 2.3 по условиям теоремы имеем, что A_1 компактно в $B_{\alpha, n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E)$. Так как функционал $g(u, z, v)$ непрерывен в A_1 , то достигает минимума в некоторой точке $(\bar{u}, \bar{z}, \bar{v}) \in A_1$.

По условию $(\bar{u}, \bar{z}, \bar{v}) \in \text{cl}\{(z|_{\partial G}, z, v_{z_x}) \in B_{\alpha, n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in H\}$, поэтому для $\frac{1}{n}$ существует функция $(z_i|_{\partial G}, z_i, v_{z_{i_x}}) \in \{(z|_{\partial G}, z, v_{z_x}) \in B_{\alpha, n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in H\}$ такая, что $|g((z_i|_{\partial G}, z_i, v_{z_{i_x}}) - g(\bar{u}, \bar{z}, \bar{v}))| < \frac{1}{n}$, т.е. последовательность $\{z_i\}$ есть минимизирующие последовательности

задачи (4.1). Обратно, если $\{z_i\}$ является минимизирующей последовательностью задачи (4.1), то существует

$$(\bar{v}, \bar{z}, \bar{v}) \in \text{cl}\{(z|_{\partial G}, z, v_{z_x}) \in B_{\alpha,n}^0(\partial G) \times L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in H\}$$

такая, что $(z_i|_{\partial G}, z_i, v_{z_{i,x}}) \rightarrow (\bar{v}, \bar{z}, \bar{v})$ и $(\bar{v}, \bar{z}, \bar{v})$ является решением задачи (4.2).

Пусть выполняется 2). Считаем, что $Q \subset W_{\alpha,1}^n(G)$ ограниченное множество. Тогда из теоремы Реллиха следует, что Q компактное множество в $L_{\alpha}^n(G)$. Поэтому, если $\varphi \equiv 0$ и $Q \subset W_{\alpha,1}^n(G)$ ограниченное множество в $W_{\alpha,1}^n(G)$, функционал $g(z, v)$ непрерывен в A_1 , то существует решение задачи (4.2), где A_1 есть замыкание множества $A_0 = \{(z, v_{z_x}) \in W_{\alpha,1}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E) : z \in Q\}$ в $L_{\alpha}^n(G) \times M_{\alpha}^*(\psi, E)$. Далее доказательство аналогично 1).

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если в теореме 4.1 функционал $g(v, z, v)$ ($g(z, v)$) полунепрерывен снизу в A_1 , то $g(v, z, v)$ ($g(z, v)$) достигает минимума на A_1 в некоторой точке $(\bar{v}, \bar{z}, \bar{v}) \in A_1$ ($(\bar{z}, \bar{v}) \in A_1$).

Замечание 4.2. Пусть для целого s пространство $W_{\alpha}^s(G)$ ($1 \leq \alpha < +\infty$) состоит из всех функций $u(x)$ с суммируемой α -й степенью вместе со своими производными до порядка s . Отметим, что аналогичное утверждение можно обобщить на пространство $W_{\alpha,s}^n(G) = (W_{\alpha}^s(G))^n$.

Литература

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. - М.: Наука, 1977. - 624с.
2. Садыгов М.А. Об обобщенных решениях задачи оптимизации. // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук. - 1988. №4. - С.28-37.
3. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Изд-во Азербайджанского Технологического Университета, Баку, 1996. - 148 с.
4. Садыгов М.А. Пространство $M_{(\alpha)}(E, Y)$ и его свойства. // Annali d'Italia, 2023, №42, С.32-49.
5. Садыгов М.А. Пространство $SM_{(\alpha)}(E, Y)$ и его свойства. // Annali d'Italia, 2023, №42, С.51-65.
6. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: Наука, 1962. - 895р.
7. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 443 р.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989. - 623 с.
9. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир, 1979. - 400с.
10. Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г.Крейна. - М.: Наука, 1979. - 544 с.
11. Мейер П.А. Вероятность и потенциалы. - М.: Мир, 1973. - 224 с.
12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. - М.: Мир, 1973. - 242 с.
13. Giner E., Penot J.-P. Subdifferential of integral functionals. // Math.Program., Ser.B., 2018, P.401-431.
14. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974. - 479 с.
15. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Изд-во Ленинградского Университета, 1985. - 415 с.
16. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. - М.: Наука, 1989. - 448 с.